

第01讲 数学建模概述

信息学院 (智能应用研究院)

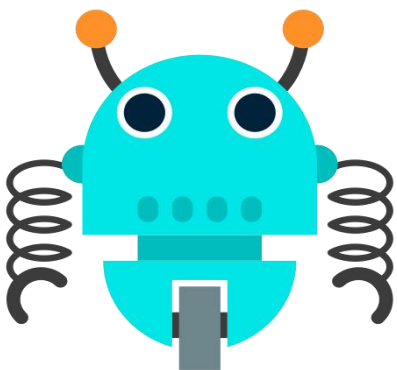
欧 新 宇

第01讲 数学建模概述

引言

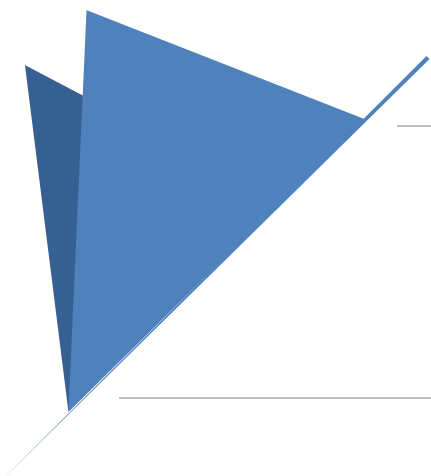


- 数学——各门科学的**基础**；是社会进步的**工具**。
- 用数学方法解决任何一个实际问题，都必须在**实际**与**数学**之间架设一座**桥梁**。
- 解决过程——**实际问题转化为数学问题**；**数学问题的求解**；**数学解答回归实际问题**。
- 这个全过程称为**数学建模**——为实际问题建立数学模型。



- 从现实对象到数学模型
- 数学建模的重要意义
- 数学模型的特点和分类
- 怎样学习数学建模
- 数学建模的基本方法和步骤





什么是数学建模

- / 从现实对象到数学模型
- / 数学建模的重要意义
- / 数学模型的特点和分类
- / 建模示例：包饺子中的数学

从现实对象到数学模型

我们常见的模型



玩具、照片、飞机、火箭模型...

~ 实物模型

水箱中的舰艇、风洞中的飞机...

~ 物理模型

地图、电路图、分子结构图...

~ 符号模型

模型是为了一定目的，对客观事物的一部分进行简缩、抽象、提炼出来的**原型**的替代物。

模型集中反映了**原型**中人们需要的那一部分特征。

从现实对象到数学模型

你碰到过的数学模型——“航行问题”

甲乙两地相距750km，船从甲到乙顺水航行需30h，从乙到甲逆水航行需50h，问船的速度是多少？



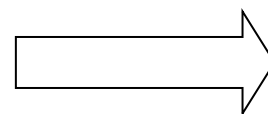
假设

用 x 表示船速， y 表示水速，列出方程：

$$(x + y) \times 30 = 750$$

$$(x - y) \times 50 = 750$$

建模



求解

$$x = 20$$

$$y = 5$$

求解

回答

答：船速为20km/h.

从现实对象到数学模型

航行问题建立数学模型的基本步骤

- 作出简化**假设** (船速、水速为常数)
- 用**符号表示**有关量 (x, y 分别表示船速和水速)
- 用物理定律 (匀速运动的距离等于速度乘以时间) 列出**数学式子**
(二元一次方程)
- **求解**得到数学解答 ($x=20, y=5$)
- **回答**原问题 (船速为20km/h)



建模示例之一：包饺子中的数学

提出问题

通常，1kg馅，1kg面，包100个饺子。

今天，馅比 1kg 多，1kg面不变，要把馅包完。

应多包几个(每个小些)，还是少包几个(每个大些)？



分析 直观认识——“大饺子包的馅多”！

但是：“用的面皮也多”！ ==》包出来的饺子变少了

需要比较：饺子从小变大时**馅和面增加**的数量关系。

建模示例之一：包饺子中的数学

模型准备和分析

建立馅、皮与数学概念的联系：

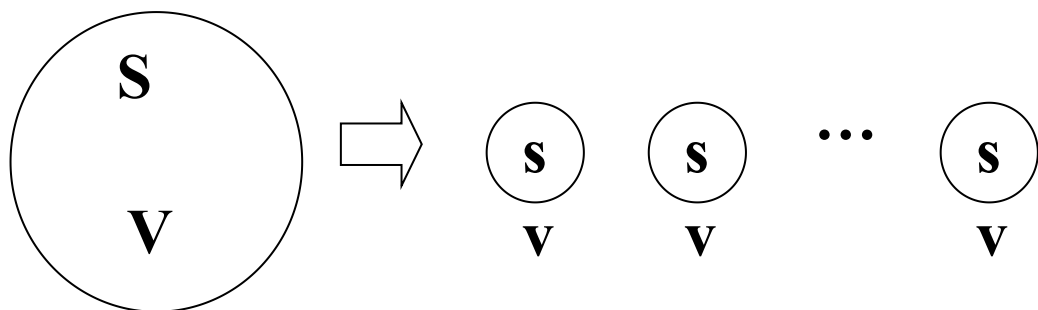
馅——体积，皮——表面积



体积 V 、面积 S
一个大饺子



体积 v 、面积 s
 n 个小饺子



$$S = ns$$

前提条件

V 和 nv 哪个大?

定性分析

V 比 nv 大多少?

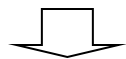
定量结果

建模示例之一：包饺子中的数学

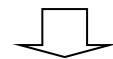
假设

1. 皮的厚度一样

2. 饺子的形状一样



$$S = ns \quad (1)$$

两个 k_1 (及 k_2) 一样

建模

$$V \text{ ? } nV$$

体积与面积的联系——半径 (特征半径)

 $R \sim$ 大皮半径

$$S = k_1 R^2$$

$$V = k_2 R^3$$



$$V = k S^{3/2} \quad (2)$$

 $r \sim$ 小皮半径

$$s = k_1 r^2,$$

$$v = k_2 r^3$$



$$v = k s^{3/2} \quad (3)$$

(1), (2), (3)

消去 S, s, k

$$V = n^{3/2} v$$

建模示例之一：包饺子中的数学

模型求解

解释

$$V = n^{3/2}v = \sqrt{n}(nv)$$

定性分析

V 比 nv 大 ($n > 1$)——大饺子包得馅多.

定量结果

V 是 nv 的 $\sqrt{n}$ 倍.

应用

同样的面粉若100个饺子包1kg馅, 50个饺子能包多少馅?

$$n_1=100, n_2=50$$

$$\sqrt{n_1}(n_1v_1)=\sqrt{n_2}(n_2v_2) \quad n_1v_1=1(\text{kg}), \quad n_2v_2=?$$

$$n_2v_2 = \sqrt{n_1/n_2} = \sqrt{2} \approx 1.4 \quad \text{50个饺子能包1.4kg馅.}$$

建模示例之一：包饺子中的数学

模型应用和讨论

若100个饺子包1kg馅，50个饺子能包1.4kg馅.

饺子数量减少一倍，真的就能**多包40%的馅**吗？

饺子越大，面皮应该越厚.



“皮的厚度一样” 的假设值得探讨！

可以对 **“皮的厚度随着半径变大而增加”** 的数量关系

作出**合理、简化的假设**，重新建模.

建模示例之一：包饺子中的数学

包饺子建模过程的基本、关键步骤

- 用**数学语言**(体积和表面积)表示现实对象(馅和皮)
- 作出简化、合理的**假设**(厚度一样，形状一样)
- 利用问题蕴含的**内在规律**(体积和表面积与半径间的几何关系)构造模型

日常生活中有哪些可用这个模型解释的现象？

建模示例之二：路障间距的设计

问题的提出

背景 校园、居民小区道路需要**限制车速**——**设置路障**

问题 限制车速 $\leq 40\text{km/h}$ ，相距多远设置一个路障？

分析 汽车过路障时速度接近零，过路障后**加速**。

车速达到 40km/h 时让司机看到下一路障而**减速**，至路障处车速又接近零。

如此循环以达到**限速**的目的。



建模示例之二：路障间距的设计

模型设计

建模

加速行驶：距离 s_1 ，时间 t_1 ，加速度 a_1 减速行驶：距离 s_2 ，时间 t_2 ，减速度 a_2

$$s_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2, \quad s_2 = \frac{1}{2} a_2 t_2^2$$

(0~Vmax)

(Vmax~0)

$$v_{\max} = a_1 t_1, \quad v_{\max} = a_2 t_2$$

限速 $v_{\max}$ 

相邻路障间行驶总距离

$$s = s_1 + s_2 = \frac{v_{\max}^2}{2} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right)$$

给定 $v_{\max}$ ，由测试数据估计 a_1 ， a_2 ，
 $\Rightarrow s = \text{路障间距}$

建模示例之二路障间距的设计

提出假设

假设

相邻路障之间汽车作等加速运动和等减速运动.

加速度、减速度：方法一 查阅资料 方法二 进行测试



加速行驶的测试数据

速度 (km/h)	0	10	20	30	40
时间 (s)	0	1.6	3.0	4.2	5.0

减速行驶的测试数据

速度 (km/h)	40	30	20	10	0
时间 (s)	0	2.2	4.0	5.5	6.8

建模示例之二：路障间距的设计

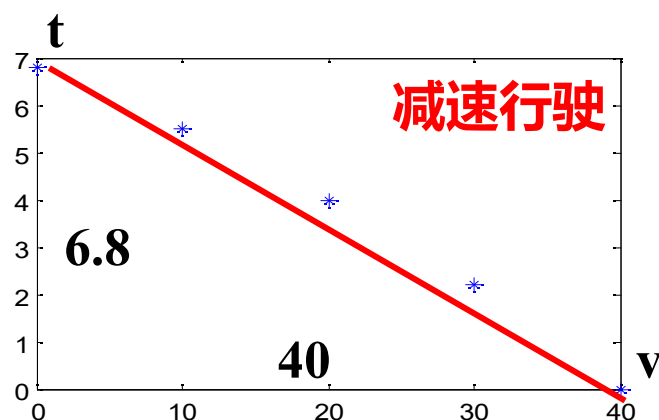
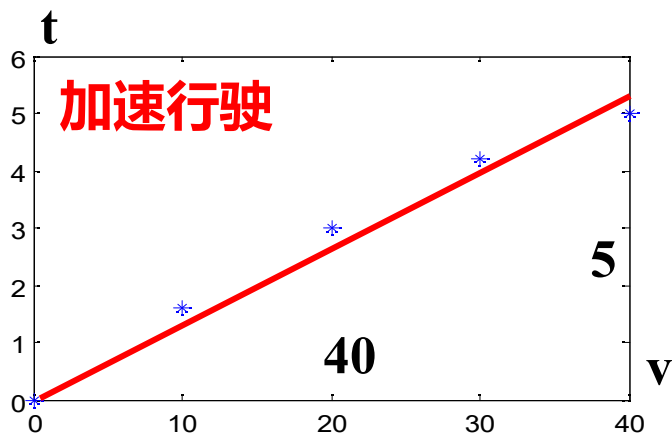
计算

测试数据作图

大致线性关系

$$v = at$$

a -> 直线的斜率



$$1\text{m/s} = 3.6\text{km/h}$$

估算

$$a_1 = \frac{40 - 0}{(5 - 0) * 3.6} = 2.2222, \quad a_2 = \frac{0 - 40}{(6.8 - 0) * 3.6} = -1.634$$

$$s = \frac{v_{max}^2}{2} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) \approx 66.5 \text{ (m)}$$

$$v_{max} = 40/3.6 = 11.1(\text{m/s})$$

设计路障间距67m

最小二乘法

$$a_1 = 2.2046, \quad a_2 = -1.6437, \quad s = 65.4245 \text{ (m)}$$

建模示例之二：路障间距的设计

路障间距建模过程的基本、关键步骤

- 作出简化、合理的**假设**(等加速和等减速行驶).
- 利用问题蕴含的内在**规律**(时间、距离、速度、加速度之间的物理关系).
- 根据测试数据**估计**模型的**参数**(加速度和减速度).

路障设计中还有可用数学建模研究的问题吗？

从现实对象到数学模型



**什么是数学模型？
什么是数学建模？**

从现实对象到数学模型

数学模型和数学建模

- 数学模型 (Mathematical Model)

- ✓ 对于一个**现实对象**，为了一个**特定目的**，
- ✓ 根据其**内在规律**，作出必要的**简化假设**，
- ✓ 运用适当的**数学工具**，得到的一个**数学表述**。

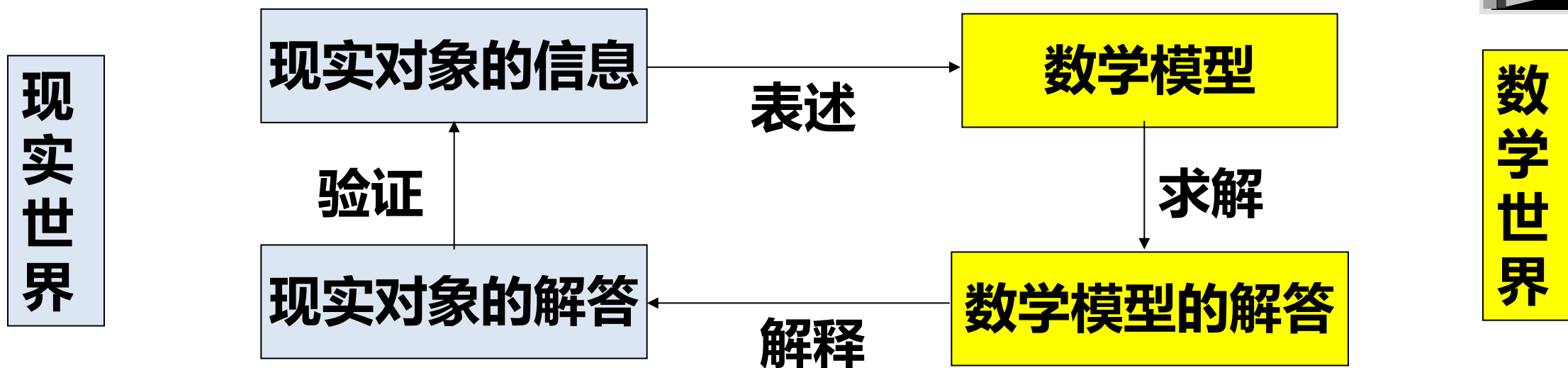
- 数学建模 (Mathematical Modeling)

建立数学模型的全过程（包括表述、求解、解释、检验等）

从现实对象到数学模型



数学建模的全过程



两次“翻译”

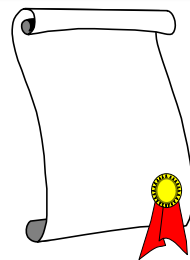
将实际问题“翻译”成数学问题.

将数学解答“翻译”回实际对象.

实践 $\Rightarrow$ 理论 $\Rightarrow$ 实践

从现实对象到数学模型

什么是数学建模



机理分析

对客观事物特性的认识  内部机理的数量规律

白箱

测试分析

对测量数据的统计分析  与数据拟合最好的模型

黑箱

二者结合

机理分析建立模型结构, 测试分析确定模型参数.

灰箱

机理分析主要通过**案例研究**学习。数学建模主要指机理分析。

数学模型的特点和分类

数学模型的特点



模型的**逼真性**和**可行性**

模型的**非预制性**

模型的**渐进性**

模型的**条理性**

模型的**强健性**

模型的**技艺性**

模型的**可转移性**

模型的**局限性**

数学模型的特点和分类

数学模型的分类

应用领域

人口、交通、经济、生态、...

数学方法

初等数学、微分方程、规划、统计、...

表现特性

确定和随机

静态和动态

离散和连续

线性和非线性

建模目的

描述、优化、预报、决策、...

了解程度

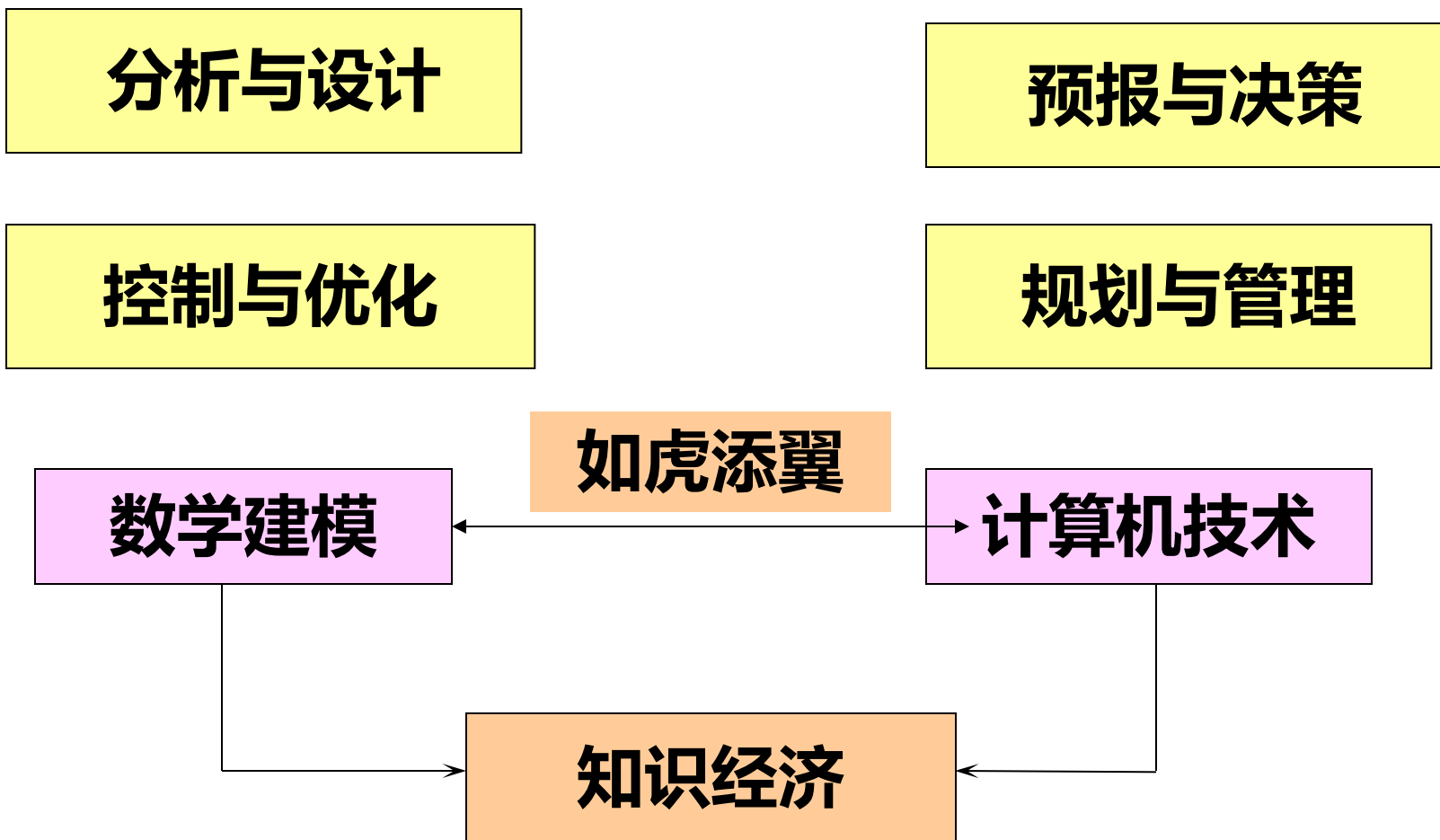
白箱

灰箱

黑箱

数学建模的重要意义

数学建模的具体应用



数学建模的重要意义

科技进步与社会发展的推动



- 计算机技术的出现和迅速发展，为数学建模的应用提供了**强有力的工具**.
- 高新技术中**数学建模与科学计算**是必不可少的手段
——**数学科学是关键的、普遍的、可应用的技术**.
- 数学迅速进入一些诸如经济、生态、人口、地质等领域，为数学建模开拓了许多新的处女地.

数学建模引入教学顺应时代发展的潮流

数学建模的重要意义



数学建模历史悠久

欧几里德

《几何原本》

光反射定律

阿基米德

浮力定律

杠杆原理

伽利略

自由落体定律

惯性原理

牛顿

万有引力定律

微积分

直到20世纪后半叶，数学建模才逐渐得到普遍重视和广泛应用，并且进入大学的课堂。

数学建模的重要意义



数学建模进入大学课堂

- 20世纪60~70年代数学建模进入西方国家的大学
- 清华大学是国内最早开设数学建模的高校之一（1983年）
- 姜启源编写的《数学模型》是国内第一本教材（1987年）
- 目前国内有数千高校开设各类数学建模课程或讲座。
- 数学建模课程的宗旨：

引起注意 激发兴趣 介绍方法 培养能力



数学建模的重要意义

为教育改革注入强大活力

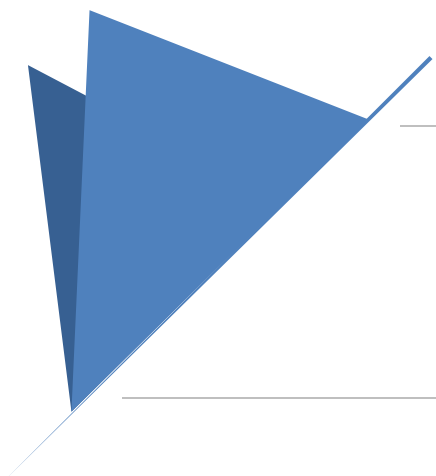


- 数学教育本质上是一种**素质教育**.
- 数学教育应培养两种能力：**算数学**(计算、推导、证明...)和**用数学**(分析、解决实际问题).

传统的数学教学体系和内容偏重前者，忽略后者.

- 让学生参加将数学应用于实际的尝试, 参与**发现和创造**的过程.

数学建模引入教学符合教育改革的需要



怎样学习数学建模

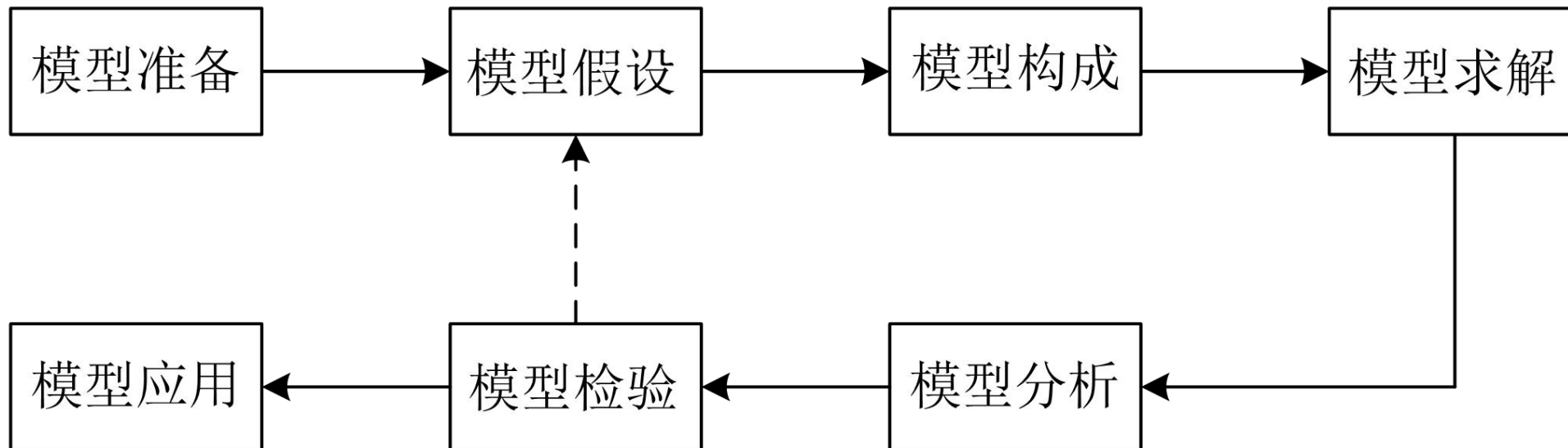
- / 数学建模的基本方法和步骤
- / 建模示例：路障间距的设计
- / 建模示例：椅子在不平的地面上放稳吗
- / 怎样学习数学建模

数学建模的基本方法和步骤

数学建模的一般步骤

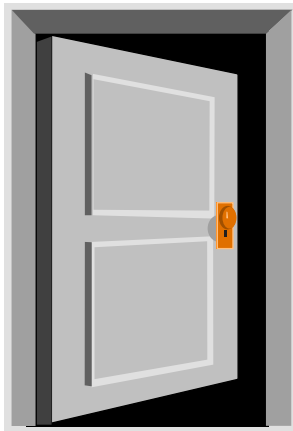


数学建模的步骤并没有固定的模式，常因问题性质、建模目的等而异。下面介绍的是用机理分析建模的一般步骤。



数学建模的基本方法和步骤

数学建模的一般步骤



模型准备

了解实际背景

明确建模目的

搜集有关信息

掌握对象特征

形成一个
比较清晰
的问题

模型假设

针对问题特点和建模目的

作出合理的、简化的假设

在合理与简化之间作出折中

数学建模的基本方法和步骤

数学建模的一般步骤

模型构成

用数学的语言、符号描述问题

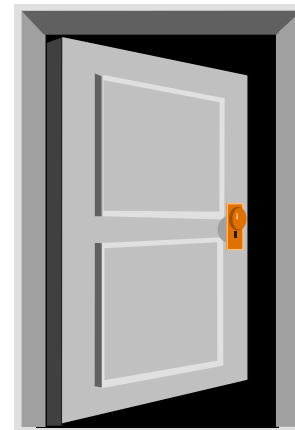
发挥**想像力**

使用**类比法**

尽量采用简单的数学工具

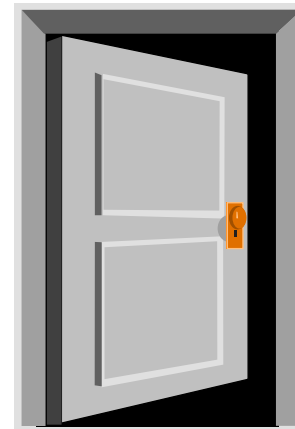
模型求解

各种数学方法、软件和计算机技术.



数学建模的基本方法和步骤

数学建模的一般步骤



模型分析

结果的误差分析、统计分析、模型对数据的稳定性分析。

模型检验

与实际现象、数据比较，检验模型的合理性、适用性。

模型应用

将经过多次反复改进的模型及其解应用于实际系统反复迭代改进

建模示例之三：椅子在不平的地面上放稳吗

问题提出

不平的地面上的椅子，
通常三只脚着地—— **放不稳！**

挪动几下，使四只脚着地—— **椅子放稳！**

讨论椅子能放稳的条件.



建模示例之三：椅子在不平的地面上放稳吗

模型假设

椅子如何才能在地面上放稳？

四腿一样长,椅脚与地面点接触,四脚连线呈**正方形**

地面高度连续变化,可视为数学上的**连续曲面**

地面相对平坦,椅子在任意位置**至少三只脚着地**



建模示例之三：椅子能在不平的地面上放稳吗

模型建立

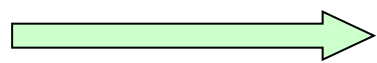
椅子位置

利用正方形(椅脚连线)的对称性.

用 θ 表示椅子位置.

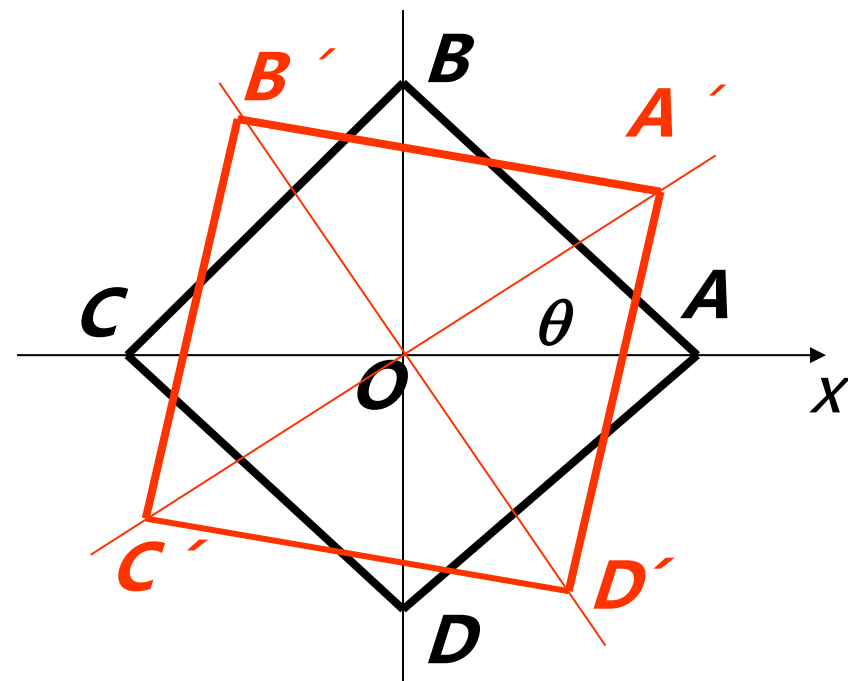
四只脚着地

椅脚与地面距离为零

距离是 θ 的函数.四个距离
(四只脚)

对称性

两个距离

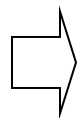
 A, C 两脚与地面距离之和 $\sim f(\theta)$ B, D 两脚与地面距离之和 $\sim g(\theta)$ 正方形 $ABCD$ 绕 O 点旋转

建模示例之三：椅子能在不平的地面上放稳吗



模型建立

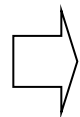
地面为连续曲面



$f(\theta)$, $g(\theta)$ 是连续函数

椅子在任意位置

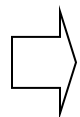
至少三只脚着地



对任意 θ , $f(\theta)$, $g(\theta)$ 至少一个为0

椅子旋转 90° ,

对角线AC和BD互换



$g(0)=0$, $f(0) > 0 \Rightarrow g(\pi/2)>0$, $f(\pi/2)=0$.

已知: $f(\theta)$, $g(\theta)$ 连续, 对任意 θ , $f(\theta) \cdot g(\theta)=0$, 且 $g(0)=f(\pi/2)=0$, $f(0) > 0$, $g(\pi/2)>0$.

证明: 存在 θ_0 , 使 $f(\theta_0) = g(\theta_0) = 0$.

建模示例之三：椅子能在不平的地面上放稳吗

模型求解

一种简单的证明方法

- 1) 令 $h(\theta) = f(\theta) - g(\theta)$, 则 $h(0) > 0$, $h(\pi/2) < 0$.
- 2) 由 f, g 连续可得 h 连续.
- 3) 据连续函数的基本性质, 必存在 θ_0 ($0 < \theta_0 < \pi/2$), 使 $h(\theta_0) = 0$, 即 $f(\theta_0) = g(\theta_0)$.
- 4) 因为 $f(\theta_0) \cdot g(\theta_0) = 0$, 所以 $f(\theta_0) = g(\theta_0) = 0$.



结论：在模型假设条件下，将椅子绕中心旋转，一定能找到四只脚着地的稳定点。

讨论：该建模过程是否存在一些问题？

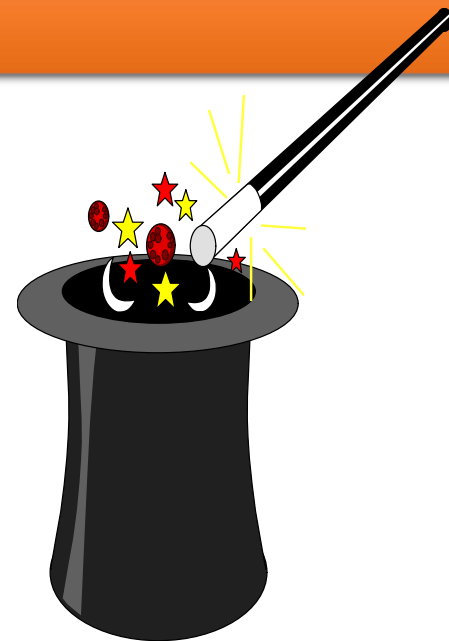
怎样学习数学建模

数学建模与其说是一门**技术**，不如说是一门**艺术**。

技术大致有章可循。 **艺术**无法归纳成普遍适用的准则。

着重培养**数学建模的意识和能力**

数学建模的意识 对于日常生活和工作中那些需要或者
可以用数学知识分析、解决的实际问题，能够
敏锐地发现并从建模的角度去积极地思考、研究。



怎样学习数学建模：学习课程+参加竞赛

- **数学建模的能力**

想象力

洞察力

判断力

创新意识

比较广博的数学知识

深入实际调查研究的决心和能力

- **如何学习数学建模**

学别人的模型（学习、分析、改进、推广）

做自己的模型（实际题目，参加竞赛）

怎样学习数学建模：学习课程+参加竞赛

学别人的模型

对于案例——椅子能不平的地面上放稳吗，在学懂的基础上可以作哪些研究？

1. 模型假设中哪些条件是本质的，哪些是非本质的？

地面高度连续 是 椅子至少三只脚着地 是

椅脚连线呈正方形 非 四脚连线呈长方形可以吗？

2. 建模的关键是什么？ 变量 θ 表示椅子的位置.

函数 $f(\theta)$, $g(\theta)$ 表示椅脚与地面的距离.

3. 建模过程中有无不严谨之处？

椅子的旋转轴在哪里，它在旋转过程中怎样变化？

怎样学习数学建模：学习课程+参加竞赛

做自己的模型



- **亲自动手**，踏踏实实地做几个实际题目——

不妨从包饺子这样的简单问题开始.

- 提倡在实际生活中**发现、提出问题**，建立模型.
- **数学建模竞赛**为提高用建模方法分析、解决实际问题的能力，搭建了广阔的平台.

怎样学习数学建模：学习课程+参加竞赛

全国大学生数学建模竞赛

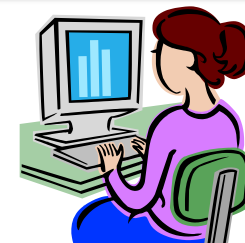
- 1992年由工业与应用数学学会CSIAM首次举办竞赛
- 1994年起教育部高教司和CSIAM共同举办（每年9月）
- 2017年全国1400多所院校、36000多队参赛。
- 我国高校规模最大的课外科技活动。



网址: <http://mcm.edu.cn>

怎样学习数学建模：学习课程+参加竞赛

全国大学生数学建模竞赛



内容

赛题：工程技术、管理科学等真实环境中简化的实际问题.

答卷：用数学建模解决问题全过程的论文.

形式

- **3名大学生组队、3天内完成的通讯比赛.**
- **可使用任何死材料，不可与队外他人讨论.**

标准

假设的合理性，建模的创造性，结果的正确性，表述的清晰性.

宗旨

创新意识 团队精神 重在参与 公平竞争

怎样学习数学建模：学习课程+参加竞赛

参加数学建模竞赛的三个阶段



赛前准备 学习有关知识、方法和软件；
题目研讨（及模拟）；组队磨合。

三天参赛 吃透题意，发挥正常，注意写作，同舟共济。

赛后继续 对有兴趣赛题的深入研讨；实际问题的数学建模。

怎样学习数学建模：学习课程+参加竞赛

竞赛培养创新精神和综合素质

- **综合运用数学知识和计算机技术分析、解决实际问题的能力.**
- **分工合作、取长补短、求同存异、同舟共济的团队精神和协调能力.**
- **快捷地搜集、整理、消化与题目有关的资料，主动学习、独立研究的能力.**

怎样学习数学建模：学习课程+参加竞赛

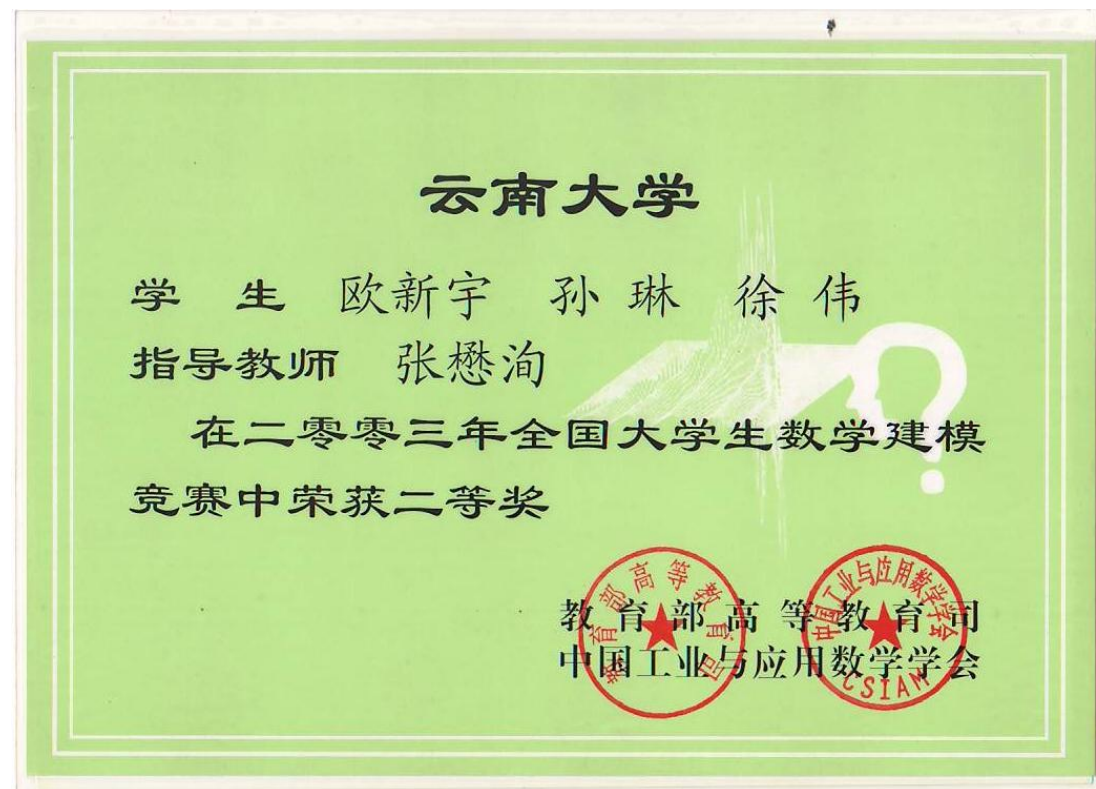
竞赛培养创新精神和综合素质

- 完成一篇用建模方法解决实际问题的科技论文，提高文字表达能力.
- 赛题紧密结合科技和社会热点问题，培养理论联系实际学风.
- 在三天开放型竞赛中自觉遵守纪律，培养诚信意识和自律精神.

“一次参赛、终身受益”

怎样学习数学建模：学习课程+参加竞赛

竞赛培养创新精神和综合素质

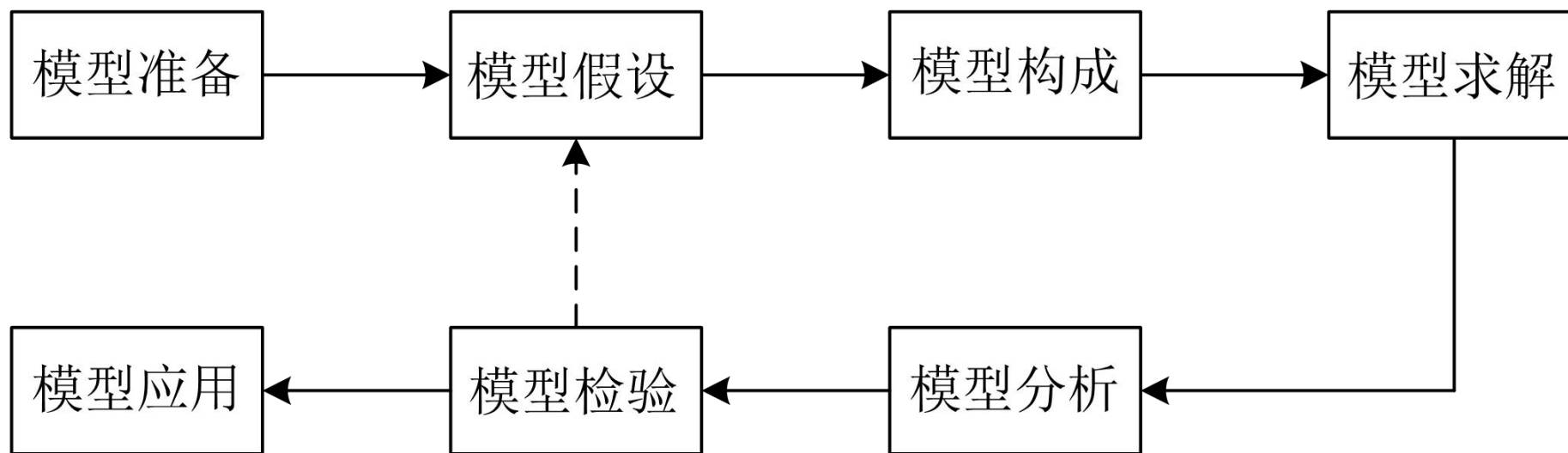


“一次参赛、终身受益”

第01讲 数学建模概述

小 结

- 对**为什么学**及**怎样学**数学建模有初步了解
- 数学建模引入大学教学是推动科技进步、社会发展和教育改革的需要
- 学习数学建模既要**勤于思考别人的模型**，更要**勇于动手做自己的模型**
- 熟悉数学建模的基本步骤：



读万卷书 行万里路 只为最好的修炼



QQ: 14777591 (宇宙骑士)

Email: ouxinyu@alumni.hust.edu.cn

Website: <http://ouxinyu.cn>

Tel: 18687840023

地址: 云南财经大学南院 智能应用研究院A306-2

云南财经大学北院 信息学院卓远楼A406